



TITLE:

アウトカムにもとづく多段決定問題について(不確実性を含む意思決定の数理とその応用)

AUTHOR(S):

中井, 達

CITATION:

中井, 達. アウトカムにもとづく多段決定問題について(不確実性を含む意思決定の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1548: 23-30

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80840>

RIGHT:

アウトカムにもとづく多段決定問題について

中井 達

(Tōru Nakai)

九州大学大学院経済学研究院

Faculty of Economics, Kyushu University

1 はじめに

評価を行政運営に本格的に取り入れることは、1960年代のアメリカではじまり、1980年代の半ば以降においては、公共部門の活動の効率化・活性化を図るため、業績や効果を計ることが課題となった。そのため、公共部門の活動サイクルをインプット (inputs) →アウトプット (outputs) →アウトカム (outcomes) とらえるようになった。このように、自治体や公団などの公的部門のマネジメントサイクルを活性化し、そのサイクルを効率化することは近年の主要な問題となっている。このような公的部門のマネジメント・サイクルをどのように捉えるかについては、いろいろな考え方があるが、細分化されることもあるが基本的にはインプット・アウトプット・アウトカムの3つの要素がその中心となっている。このインプットとは、資源や費用などであり、アウトプットとしてはこれらのインプットを用いて活動した結果として得られる生産物やサービスである。アウトカムは、これらの行動の目標とするものあるいは目的に対して、これらの生産物やサービスを得るために実施した結果を評価するための基準とされている。これら3つのインプット・アウトプット・アウトカムのあいだの関係については、インプットとアウトプットは結果が数値的に計測できるものであれば比較的容易に評価を考えることができるが、有効性に関わるアウトカムには多くの問題点がある。すなわち、質的な評価が求められるものについては、実施したことによる結果を評価することは簡単ではない。とくにアウトカムは、企業などのように収益で業績が計れるものとは異なり、公共部門の活動を評価するために必要なものである。そのため、公共部門の評価では経済性・効率性の他に、有効性を評価することが必要となってくる(中井 [3, 4, 5])。

ここでは、アウトカムに基づいて支出を行う自治体や公団などの公的部門の決定問題を、多段決定問題として定式化し、最適政策や最適政策にしたがったときの期待利得について考えることにする。また、アウトカムは、対象とするサービスや事業に対

する支出によって変化するものではあるが、環境や経済状況などの要因などによっても変化するものである。そのため、いろいろな状況によって状態がマルコフ過程にしたがって推移する場合についても考察する。

2節では、状態の変化が予算からの追加的な支出によってのみ変化するモデルを考える。2節では、状態がマルコフ過程にしたがって推移するモデルについて、いくつかの仮定の下で解析し、最適政策や最適政策にしたがってときに得られる総期待利得の性質などについて考える。

2 公共部門に対する支出の逐次決定モデル

2.1 充足度や満足度と状態空間

消防活動や警察活動といった公共サービスに対する支出を、毎年度の予算の範囲内で行うことを考えてみよう。これらの公共サービスに対して、実際の設備や施設あるいは人員と、満足度や充足度とのあいだには関連があることは確かであるが、かといって設備や施設、人員が多くなったところで、生活環境や経済状況などが変化的ことで、これらのサービスに対する要求が増加し、満足度が低下することもある。この状況を表すために、設備や施設、人員数とは別に、満足度あるいは充足度を考える。これらの満足度や充足度は、対象とサービスに対して満足を感じている、あるいは充足していると感じている住民の割合ととらえることにすれば、予算を追加して支出することで、これらの住民の割合の変化を促すことができるとする。

そのため、このモデルを解析するために状態空間が $[0, \infty)$ あるいは $(-\infty, \infty)$ のプロセスとして表し、この状態と満足度や充足度といった尺度との関係を、 $[0, \infty)$ あるいは $(-\infty, \infty)$ 上の確率変数の分布関数 $\Phi(x)$ を用いて表すことにする。すなわち、プロセスの状態が $s \in [0, \infty)$ のとき、対象とするサービスに対する満足度や充足度が、 $\Phi(s)$ である。たとえば、指数分布のように $\phi(s) = \lambda e^{-\lambda s}$ と考えれば、この確率変数は対象とするサービスに対して満足している住民の分布を表すとする。したがって、ここでは満足度や充足度といった尺度ではなく、 $[0, \infty)$ あるいは $(-\infty, \infty)$ を状態空間とするモデルとして解析する。この場合、 $\Phi(s) = 1$ であれば対象とするサービスに住民すべてが満足していると考えられ、この s が減少するにしたがって、満足している住民の割合も減少することになる。このように、対象とするサービスに対する満足度や充足度ではなく、状態空間を $[0, \infty)$ あるいは $(-\infty, \infty)$ とするモデルとして定式化し、解析を行うことにする。

2.2 支出の逐次決定モデル

まずはじめに、状態を s とする。このとき、対象とするサービスに対する満足度あるいは充足度は、この状態に応じて定まる。いま、状態が s のとき、各期ごとの予算の範囲内で x を支出すれば、そのときの支出に伴う費用を $c(x)$ とし、その結果として状態は s と支出額 x の関数として $\sigma(s, x) = s(x)$ となるとする。ここでは、記号を簡単にするために $\sigma(s, x)$ の代わりに $s(x)$ と表す。また、費用関数が $c(x) = x$ であれば費用と支出額は等しい。

はじめに、 $s(x)$ に関する条件を示すために、2変数関数 $g(x, s)$ に関するつぎの定義を導入する (Ross[6])。

定義 1 2変数関数 $g(x, s)$ が、 $x < y$ および $s < t$ となる x, y と s, t に対して

$$g(y, t) + g(x, s) \leq g(x, t) + g(y, s)$$

となるとき、この関数を submodular という。

このとき、 $c(x)$ と $s(x)$ に対してつぎの仮定をもうける。

仮定 1 $s(x)$ は、 s と x の2変数関数とみたとき、submodular である。すなわち、 $x < y$ および $s < t$ のとき

$$\sigma(t, y) - \sigma(t, x) \leq \sigma(s, y) - \sigma(s, x) \quad (1)$$

となる。また、 $c(x)$ は、 x に関して増加かつ凸関数とし、 $s(x)$ は、 x に関して (単調) 増加かつ凹関数であり、 s に関する (単調) 増加関数とする。また、 $c(0) = 0$ であり $s(0) = s$ とする。

ところで、関数 $\sigma(s, x)$ が $\sigma(s, x) = s + d(x)$ のときも、(1) 式を満たすことは明らかである。一方、状態 s とそのときの満足度や充足度で考えれば、同じ支出額 s であっても、支出した時点の満足度や充足度が異なれば、これらの値の改善度合いは異なる。このことから、 $\sigma(s, x) = s + d(x)$ と仮定してもよい。

いま、計画期間を n とし、各期ごとの予算の上限を K とすれば、この予算の上限の範囲内で設備や施設あるいは人員を増やすことで、状態 s を変化させて、現在の満足度あるいは充足度を上昇させるモデルである。このとき、最適政策にしたがったときに得られる期待利得を $v_n(s)$ とすれば、最適方程式は

$$v_n(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(x) + v_{n-1}(s(x))\} \quad (2)$$

となる。ただし、 $v_1(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \{-c(x) + u(s(x))\}$ である。

初期条件は $v_0(s) = u(s)$ であり、 $u(s)$ は、 s に関して増加な凹 (concave) 関数とする。このとき、帰納法により次の性質が簡単に導かれる。

補題 1 $v_n(s)$ は s に関する非減少関数である。すなわち、 $s \leq t$ ならば $v_n(s) \leq v_n(t)$ である。

補題 2 $v_n(s)$ は n に関して非減少関数である。すなわち、任意の $n \geq 1$ に対して、 $v_n(s) \leq v_{n+1}(s)$ である。

補題 3 $v_n(s)$ は s に関する凹関数である。

補題 4 計画期間が n で、状態が s のとき、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $s \leq t$ に対して、 $x_n^*(s) \leq x_n^*(t)$ である。

補題 5 残りの計画期間が n で、状態が s のとき、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、 $x_{n-1}^*(s) \geq x_n^*(s)$ である。

補題 6 $s < t$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、 $v_{n-1}(t) - v_{n-1}(s) \geq v_n(t) - v_n(s)$ である。

3 公共部門に対する支出の逐次決定モデル：確率モデル

前節では、対象とするサービスに対して満足している住民の割合は状態 s によって表せ、この状態は外部の状況に影響されず、新たに支出することで、変化させることができた。しかし、一般には予算からの支出とは異なる、社会状況や経済状態などの外部から要因の影響を受けてこの状態が変化し、それに伴って対象とするサービスに対して満足を感じる住民の割合は変化する。したがって、この状態は確率過程にしたがって推移するものとし、ここではマルコフ過程にしたがうものとする。いいかえれば、設備や機器、あるいは人員を増やすために、予算内での追加的な支出を行うだけでなく、ある確率過程にしたがって状態が変化し、満足度あるいは充足度が下がる場合もあるモデルである。

状態空間をこれまで同様に $[0, \infty)$ とし、状態の推移法則を $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ とする。以下の議論は、状態空間が $(-\infty, \infty)$ であっても、同様に考えることができる。はじめに、以下の議論で用いる TP_2 (total positive of order two) を定義する。

定義 2 集合値関数 $P = (p_s(t))_{s,t \in [0, \infty)}$ が、つぎの性質を持つとき、この P は TP_2 の性質を持つという。すなわち、 $s \leq t$ および $u \leq v$ となる任意の s, t, u と v に対して $(s, t, u, v \in [0, \infty))$ 、 $\begin{vmatrix} p_s(u) & p_s(v) \\ p_t(u) & p_t(v) \end{vmatrix} \geq 0$ が、成り立つ。

この TP_2 を用いて、推移法則に関する次の仮定を設ける。

仮定 2 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ は TP_2 である。

計画期間が n で、各期ごとの予算額の上限が K とする。このとき、最適に振る舞ったときの状態に対する期待利得を $V_n(s)$ とすれば、状態がマルコフ過程にしたがって推移するから、最適方程式はつぎのようになる。

$$V_n(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \left\{ -c(x) + \int_0^\infty p_{s(x)}(t) V_{n-1}(t) dt \right\} \quad (3)$$

ただし、 $V_1(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \left\{ -c(x) + \int_0^\infty p_{s(x)}(t) u(t) dt \right\}$ であり、 $s(x)$ は、状態が s のとき、 x を追加して支出したときの新たな状態を表す関数で前節の条件を満たすものである。

このマルコフ過程に関する基本的な性質は、つぎのようなものである。

補題 7 集合値関数 $P = (p_s(t))_{s,t \in [0, \infty)}$ と、関数 $s(x)$ に対して、任意の s, t, u と v に対して ($u, v \in [0, \infty)$)、 $x \leq y$ かつ $u \leq v$ であれば、任意の s ($s \in [0, \infty)$) について、 $\begin{vmatrix} p_{s(x)}(u) & p_{s(x)}(v) \\ p_{s(y)}(u) & p_{s(y)}(v) \end{vmatrix} \geq 0$ となる。

つぎに、定義 3 にしたがって、 TP_2 を用いて確率変数のあいだに半順序を導入する。ここで、確率変数は全順序 \geq が定義された完備で可分な距離空間上で定義されているものとする。

定義 3 確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(x)$ を持つ 2 つの確率変数 X と Y に対して、 $x \geq y$ となる任意の x と y に対して、 $f_X(y)f_Y(x) \leq f_X(x)f_Y(y)$ であるとき、 X は Y より尤度比の意味で大きいといい、 $X \succeq Y$ と表す。

この定義を用いて導入される確率変数のあいだの順序が半順序であることは、簡単に示すことができる。おなじように、 $\mathcal{F}_{SSD} = \{u \mid u(x) \text{ は、} x \text{ に関して増加かつ凹関数}\}$ とし、この集合を使って定義 4 により確率変数のあいだに半順序を定義する。

定義 4 確率密度関数 $f_X(x)$ と $f_Y(x)$ を持つ 2 つの確率変数 X と Y が、 $u(x) \in \mathcal{F}_{SSD}$ となる任意の $u(x)$ に対して、 $E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ であるとき $X \geq_{SSD} Y$ とする。

これら 2 つの定義 (定義 3 と定義 4) による順序関係に関して、補題 8 が成り立つ。すなわち、定義 3 による順序関係は、定義 4 による順序関係より強いことがわかる。

補題 8 2 つの確率変数 X と Y に対して、 $X \succeq Y$ ならば $X \geq_{SSD} Y$ である。

つぎに、2つの確率変数 $S_{s(x)}, S_{s(y)}$ をそれぞれ状態が s のとき、追加して x の支出による推移後の状態を表す確率変数とすれば、補題7より $x < y$ ならば、 $S_{s(y)} \succeq S_{s(x)}$ となる。したがって、Kijima and Ohnishi[2] で示された性質から、補題9が成り立つ。このことよりマルコフ過程の推移法則が TP_2 であれば、補題10が成り立つことが導かれる。

補題9 $x < y$ ならば、 \mathcal{F}_{SSD} に含まれる任意の関数 u に対して、 $\int_0^\infty p_{s(x)}(t)u(t)dt \leq \int_0^\infty p_{s(y)}(t)u(t)dt$ である。

補題10 関数 $u(t)$ が、 t に関する増加かつ凹関数であれば、 $\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt$ もまた s に関する増加関数である。

補題11 $V_n(s)$ は、 s に関する非減少関数である。すなわち、 $s < s'$ ならば、 $V_n(s) \geq V_n(s')$ である。

ところで、状態空間を $[0, \infty)$ としたとき、ここで挙げた条件を満たす推移法則を満たすものとして、つぎような例が存在する。いっぽう、状態空間が $(-\infty, \infty)$ のとき同様の条件を満たすものは正規分布を始め、よく知られている分布で存在する。ここで、次の仮定を設けるが、これらの例は仮定3を満足する。

仮定3 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ に対して、 t に関する増加かつ凹関数を $u(t)$ とすれば、 $\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt$ は s に関する凹関数となっている。

この仮定の下で、補題12と性質1が成り立つ。

補題12 $V_n(s)$ は、 s に関する凹関数である。

性質1 計画期間が n であり、状態が s のときの、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とする。このとき、 $s \leq s'$ ならば、 $x_n^*(s) \leq x_n^*(s')$ である。

次の仮定は、性質2を示すために必要な仮定である。

仮定4 推移法則 $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ は、つぎの性質を満たす。 t に関する増加かつ凹関数を $u(t)$ とすれば、 $\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt - u(t)$ は、 s に関する減少関数である。

補題13 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$V_n(s') - V_n(s) \leq \int_0^\infty p_{s'}(t)V_{n-1}(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)V_{n-1}(t)dt \quad (4)$$

である。

補題 14 $s < s'$ ならば、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$\int_0^\infty p_{s'}(t)V_{n-1}(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)V_{n-1}(t)dt \geq \int_0^\infty p_{s'}(t)V_n(t)dt - \int_0^\infty p_s(t)V_n(t)dt$$

である。

性質 2 計画期間が n で、状態が s のときの、最適な支出額を $x_n^*(s)$ とすれば、任意の $n \geq 1$ に対して、 $x_{n-1}^*(s) \geq x_n^*(s)$ である。

ところで、最適政策にしたがったときの最適値 $V_n(s)$ の n に関する単調性について考える。基本的に、公的サービスに対する支出は、将来の満足度や充足度による期待効用が現時点に比べて悪くなったとしても、これらのサービスを打ち切ることとはできず、続けて行う必要がある。したがって、満足度や充足度を表す状態の関数として表される効用と、推移法則によつては、 $V_n(s)$ は n に関して増加することもあるれば、減少することもある。ところで、任意の s に対して $V_{n-1}(s) \leq V_{n-2}(s)$ ならば、 $\int_0^\infty p_{s(x)}(t)V_{n-1}(t)dt \leq \int_0^\infty p_{s(x)}(t)V_{n-2}(t)dt$ となるので、 $V_n(s) \leq V_{n-1}(s)$ となることがわかる。反対に、任意の s に対して $V_{n-1}(s) \geq V_{n-2}(s)$ ならば、 $V_n(s) \geq V_{n-1}(s)$ となる。したがって、帰納法を用いれば、 $n=1$ のときの性質によつて、 $V_n(s)$ の n に関する単調性が定まる。すなわち、 $n=1$ のときは、

$$V_1(s) = \max_{0 \leq x \leq K} \left\{ -c(x) + \int_0^\infty p_{s(x)}(t)u(t)dt \right\}$$

であり、 $V_0(s) = u(s)$ だから、 $V_1(s) \geq V_0(s)$ であれば $V_n(s)$ は n に関する非減少関数であり、 $V_1(s) \leq V_0(s)$ であれば $V_n(s)$ は n に関する非増加関数となることがわかる。

ところで、 $u(s)$ が s に関する凸関数のときにはどうなるだろうか。いま、状態が s のとき、追加して x の支出による推移後の状態を表す確率変数 $S_{s(x)}$ に対して、 $E[S_{s(0)}] \geq s$ であれば、 $\int_0^\infty p_s(t)u(t)dt \geq u(s)$ となるので、 $V_1(s) \geq V_0(s)$ となることがわかる。したがって、 $V_n(s)$ は n に関する非減少関数となる。この場合は、追加の支出をしなくとも、期待効用は現在の充足度や満足度による効用より大きくなる場合となっている。

参考文献

- [1] Hedley, T. P. (1998), "Measuring Public Sector Effectiveness Using Private Sector Methods", *Public Productivity & Man. Rev.*, **21** (3), 251-258.
- [2] M. Kijima and M. Ohnishi, Stochastic Orders and Their Applications in Financial Optimization, *Mathematical Methods of Opens. Res.*, **50**, 351-372, (1999).

- [3] 中井 達, 効率性と有効性—評価と最適化, 『政策分析 2003—政策・制度への歴史的接近の視軸から』, 九州大学出版会, 275–301, 2003.
- [4] 中井 達, 『政策評価—費用便益分析から包絡分析法まで—』, ミネルヴァ書房, 京都, 2005.
- [5] T. Nakai, Economy, Efficiency and Effectiveness, *Policy Analysis in the Era of Globalization and Localization*, Kyushu University Press, 165–193, 2006.
- [6] S. M. Ross, *Stochastic Processes*, John-Wiley, New York, New York, 1983.